

Numele și prenumele.....

TEST- 5-

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.

SUBIECTUL I

(30 puncte)

- 5p 1. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$ astfel încât $a_1 = 3$ și $a_3 = 7$. Calculați suma primilor 10 termeni ai progresiei.
- 5p 2. Determinați $m \in \mathbb{R}$, pentru care $A(m, -1)$ aparține graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 3x + 1$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(2x + 3) = 2$.
- 5p 4. Determinați numărul submulțimilor cu 3 elemente ale unei mulțimi cu 5 elemente.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1, -2)$, $B(1, 2)$ și $C(2, -1)$. Calculați aria triunghiului ABC .
- 5p 6. Triunghiul ABC are $AB=AC=8$ și $m(\sphericalangle BAC) = 30^\circ$.

SUBIECTUL II

(30 puncte)

1. Se consideră matricele $A(x) = \begin{pmatrix} x & 3 \\ -3 & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(x)) = x^2 + 9$, pentru orice număr real x .
- 5p b) Demonstrați că $A(2020 - x) + A(2020 + x) = 2A(2020)$.
- 5p c) Determinați numărul natural n , pentru care $A(n)A(2 - n) = 2A(-6)$.
2. Pe mulțimea $M = [0, +\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x * y = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- 5p a) Arătați că $N = \sqrt{33} * \sqrt{31}$ este un număr natural.
- 5p b) Determinați numărul $x \in M$ pentru care $(x * x * x)^2 = 300$.
- 5p c) Se consideră funcția $f: (-\infty, 0] \rightarrow [0, +\infty), f(x) = \sqrt{-2020x}$. Arătați că $f(x + y) = f(x) * f(y)$, pentru orice $x, y \in (-\infty, 0]$.

SUBIECTUL III

(30 puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 + x^2 + x + 3^x$.
- 5p a) Calculați $f'(0)$.
- 5p b) Arătați că funcția f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.
- 5p c) Arătați că $a^3 + a^2 + a - b^3 - b^2 - b \leq 3^b - 3^a$, oricare ar fi numerele reale a, b cu $a \leq b$.
2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră funcția $f_n: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = x^n e^x$.
- 5p a) Calculați $\int_0^1 \frac{f_1(x)}{e^x} dx$.
- 5p b) Calculați $\int_0^1 f_1(x) dx$.
- 5p c) Arătați că $\int_0^1 f_n(x^2) dx \geq \frac{1}{2n+1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.